A matematikai statisztika alapjai.

B <u>esemény indikátora, és ezek korrelálatlanok, akkor függetlenek is.</u>

Ekkor ugyanis $M(\xi_A) = P(A)$, $M(\xi_B) = P(B)$, és $M(\xi_A \cdot \xi_B) = P(A \cap B)$. Igy most $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, azaz A és B független események, ami ekvivalens azzal, hogy indikátoraik függetlenek.

<u>Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószinüségi változók szórásai léteznek, és ezek páronként korrelálatlanok, akkor</u>

$$D^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + \dots + D^2(\xi_n).$$

Ekkor ugyanis

$$D^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = M\left(\left(\xi_1 + \dots + \xi_n - M(\xi_1 + \dots + \xi_n)\right)^2\right) = M\left(\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - M(\xi_i))\right)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M\left((\xi_i - M(\xi_i))^2\right) + 2 \sum_{\substack{i,j \\ 1 \le i < j \le n}} M\left((\xi_i - M(\xi_i))(\xi_j - M(\xi_j))\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i).$$

mat. stat.

Még egy fogalmat emlitünk meg. Tegyük fel, hogy $0 < D(\xi) < \infty$. A $\xi' = \dfrac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$ valószinüségi változót ξ <u>standardizáltjának</u> nevezzük. Nyilván $M(\xi') = 0$, és $D(\xi') = 1$. Ha $0 < D(\eta) < \infty$ is teljesül, akkor $C(\xi', \eta') = M(\xi' \cdot \eta')$, és $R(\xi', \eta') = M(\xi' \cdot \eta')$.

mat. stat.

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószinüségi mezőn értelmezett valószinüségi változók. Tegyük fel, hogy a $D(\xi_i) > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ szórások léteznek. A rövidség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket: $m_i = M(\xi_i)$, $D_i = D(\xi_i)$ $(i = 1, \dots, n)$,

$$c_{k,l} = M((\xi_k - m_k)(\xi_l - m_l)), \quad r_{k,l} = R(\xi_k, \xi_l) \quad (k,l = 1,\dots,n).$$

Megjegyezzük, hogy mindezeket a mennyiségeket a $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószinüségi változók együttes eloszlásának ismeretében meghatározhatjuk.

Tekintsük a $C = (c_{k,l})$ és az $R = (r_{k,l})$ $n \times n$-es mátrixokat; C a $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószinüségi változók <u>kovariancia-mátrixa</u>, R pedig a $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószinüségi változók <u>korreláció-mátrixa</u>. Ezek szimmetrikus mátrixok, és $c_{k,k} = D_k^2$, $r_{k,k} = 1$ $(k = 1,\dots,n)$.

Megemlitjük, hogy ha kettőnél több $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószinüségi változó együttes vizsgálatáról van szó, akkor az $r_{k,l}$ korrelációs együtthatót a ξ_k, ξ_l valószinüségi változók <u>totális korrelációs együtthatójának</u> nevezzük.

A korrelációs együttható definiciója szerint

$$c_{k,l} = r_{k,l} D_k D_l \quad (k,l = 1,\dots,n),$$

igy bevezetve a

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_n \end{pmatrix}$$

un. <u>szórás-mátrixot</u>, irhatjuk, hogy

$$C = DRD, \quad \text{ill.} \quad R = D^{-1} C D^{-1}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy egy $A = (a_{k,l})$ $n \times n$-es szimmetrikus mátrixot <u>pozitiv szemidefinitnek</u>, ill. <u>pozitiv definitnek</u> nevezzük, ha a megfelelő $\cancel{\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} x_k x_l}$ $\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} x_k x_l$

kvadratikus alak pozitiv szemidefinit, ill. pozitiv definit. A lineáris algebrából ismeretes, hogy ha az A szimmetrikus mátrix pozitiv szemidefinit, ill. ha pozitiv definit, akkor $|A| \geq 0$, ill. $|A| > 0$.

Megmutatható a következő állitás.

C és R pozitiv szemidefinit mátrixok.

Valóban bármely $x_1, \dots, x_m$ esetén

$$\sum_{k,l=1}^{m} c_{k,l} x_k x_l = \sum_{k,l=1}^{m} M\left((x_k(\xi_k - m_k))(x_l(\xi_l - m_l))\right) =$$

$$= M\left(\sum_{k,l=1}^{m} (x_k(\xi_k - m_k))(x_l(\xi_l - m_l))\right) = M\left(\left(\sum_{k=1}^{m} x_k(\xi_k - m_k)\right)^2\right) \geq 0.$$

Hasonlóan mutatható meg, hogy az R mátrix is pozitiv szemidefinit.

Igy az előbbi megjegyzés szerint $|C| \geq 0$, $|R| \geq 0$.

A $\xi_1, \dots, \xi_m$ valószinüségi változókat lineárisan függetleneknek nevezzük, ha $P\left(\sum_{k=1}^{m} x_k(\xi_k - m_k) = 0\right) = 1$ esetén $x_1^2 + \dots + x_m^2 = 0$.

Megmutatható az alábbi tétel.

A következő állitások ekvivalensek:

1) C pozitiv definit, 2) R pozitiv definit,

3) $|C| > 0$, 4) $|R| > 0$,

5) $\xi_1, \dots, \xi_m$ lineárisan függetlenek.

Nyilvánvaló, hogy 1) és 2) ekvivalensek. Ha ugyanis az egyik mátrix pozitiv definit, akkor $\left(D_i > 0 \quad (i = 1, \dots, m)\right.$, és igy $c_{k,l} = r_{k,l} D_k D_l$ $(k,l = 1, \dots, m)$ és alapján$\left.\right)$ a két

$$\boxed{\sum_{k,l=1}^{n} c_{k,l} x_k x_l = \sum_{k,l=1}^{n} r_{k,l} (x_k D_k)(x_l D_l), \quad \sum_{k,l=1}^{n} r_{k,l} x_k x_l = \sum_{k,l=1}^{n} c_{k,l} \left(\frac{x_k}{D_k}\right) \cdot \left(\frac{x_l}{D_l}\right)}$$

$$\sum_{k,l=1}^{m} c_{k,l} x_k x_l , \qquad \sum_{k,l=1}^{m} r_{k,l} x_k x_l$$

(*) $|C| = D_1^2 \cdots D_n^2 |R|$, $|R| = \frac{|C|}{D_1^2 \cdots D_n^2}$

kvadratikus alak egyidőben pozitiv definit. Hasonlóképpen 3) és 4) is ekvivalensek. Ha ugyanis az egyik determináns pozitiv, akkor $\langle |D| \neq 0$ $\left(|D| = \prod_{i=1}^{n} D_i > 0\right)$ ~~így~~$\rangle$ $C' = DRD$ (*) alapján $|C'|$ és $|R| = \frac{|C|}{\prod_{i=1}^{n} D_i^2}$ egyidőben pozitivok. Megmutatjuk, hogy 1)-ből következik 5). Ha C' pozitiv definit, akkor $|C'| > 0$. Legyen $x_1, \dots, x_m$ olyan értékrendszer, hogy $P\left(\sum_{k=1}^{m} x_k(\xi_k - m_k) = 0\right) = 1$. Ekkor $P\left(\left(\sum_{k=1}^{m} x_k(\xi_k - m_k)\right)(\xi_l - m_l) = 0\right) = 1$ $(l = 1, \dots, m)$ is teljesül, amiből következik, hogy

$$(**) \qquad 0 = M\left(\sum_{k=1}^{m} x_k(\xi_k - m_k)(\xi_l - m_l)\right) = \sum_{k=1}^{m} c_{k,l} x_k \quad (l = 1, \dots, n),$$

azaz $(x_1, \dots, x_n)$ ⊥ a Γ mátrix mindegyik oszlopára !!

Mivel $|C'| > 0$, ezért $x_k = 0$ $(k = 1, \dots, n)$. Tehát $\xi_1, \dots, \xi_m$ lineárisan függetlenek. Végül megmutatjuk, hogy 5)-ből következik 1) is. Legyenek tehát $\xi_1, \dots, \xi_m$ lineárisan függetlenek. Ekkor bármely $x_1, \dots, x_m$ $(x_1^2 + \dots + x_m^2 > 0)$ esetén $P\left(\left|\sum_{k=1}^{m} x_k(\xi_k - m_k)\right| > 0\right) > 0$, igy

$$0 < M\left(\left(\sum_{k=1}^{m} x_k(\xi_k - m_k)\right)^2\right) = \sum_{k,l=1}^{m} c_{k,l} x_k x_l ,$$

azaz C' pozitiv definit. Ezzel állításunkat bebizonyitottuk.

A $\sqrt{|R|}$ értéket a $\xi_1, \dots, \xi_m$ valószinüségi változók szóródási együtthatójának nevezzük.

Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ páronként korrelálatlanok, akkor $|R| = 1$. Ha pedig $\xi_1, \dots, \xi_n$ lineárisan függők, akkor $|R| = 0$ ($\Leftarrow$ ekkor $|C|=0 \Leftarrow (**)$) !!!

$n=2$ esetben az $r_{1,2} = r_{2,1} = r$ jelöléssel

$|R| = \begin{vmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{vmatrix} = 1 - r^2$, és igy $\sqrt{|R|} = \sqrt{1-r^2}$.

(ha ξ_1, ξ_2 korrelálatlanok, akkor $r=0$; ha ξ_1, ξ_2 lin. függők, akkor $r=1$)

Megmutatjuk még a következő állitást.

<u>Minden esetben</u> $|R| \leqq 1$. <u>Ha</u> $|R| = 1$, <u>akkor</u> $\xi_1, \dots, \xi_n$ <u>páronként korrelálatlanok</u>.

Ennek a bizonyitására előrebocsájtunk két segédtételt.

mat. stat.

<u>Ha</u> B <u>szimmetrikus, pozitiv definit mátrix, akkor a</u> B^{-1} <u>inverze is pozitiv definit.</u> (és szimmetrikus)

mat. stat.

Mivel $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ pozitiv definit, igy $|B| > 0$, ezért ~~van~~ inverze:

$$B^{-1} = \left(\frac{B_{i,j}}{|B|} \right),$$

ahol $B_{i,j}$ jelöli a $b_{i,j}$ elemhez tartozó adjungált aldeterminánst. Nyilván B^{-1} is szimmetrikus mátrix.

Legyenek $x_1, \dots, x_n$ tetszőleges értékek, amelyekre $x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0$. Ekkor az

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{i,k}}{|B|} x_k \quad (i=1,\dots,n)$$

értékekre is teljesül $y_1^2 + \dots + y_n^2 > 0$. Igy mivel

$$M\left(M\left(\left(\eta-M(\eta|\xi)\right)\left(M(\eta|\xi)-g(\xi)\right)|\xi\right)\right)=$$
$$=M\left(\left(M(\eta|\xi)-g(\xi)\right)M\left(\left(\eta-M(\eta|\xi)\right)|\xi\right)\right),$$

és itt

$$M\left(\left(\eta-M(\eta|\xi)\right)|\xi\right)=M(\eta|\xi)-M\left(M(\eta|\xi)|\xi\right)=M(\eta|\xi)-M(\eta|\xi)M(1|\xi)=$$
$$=M(\eta|\xi)-M(\eta|\xi)=0$$

1 valószinüséggel teljesül, igy

$$M\left(\left(M\left(\left(\eta-M(\eta|\xi)\right)\left(M(\eta|\xi)-g(\xi)\right)\right)|\xi\right)\right)=$$
$$=M\left(\left(M(\eta|\xi)-g(\xi)\right).0\right)=0.$$

A fenti egyenlőségből pedig adódik az állitás.

Tehát η ξ -re vonatkozó regressziója az olyan vizsgálatoknál jelentős, amikor η értékeit ξ értékeivel kivánjuk közelitőleg meghatározni. Az előbbi tétel szerint ξ „összes lehetséges függvényei" közül a regresszió közeliti meg η -t legjobban, ha az eltérést négyzetes integrálközépben mérjük.

A regressziót általában nehéz meghatározni, éppen ezért egyszerübb közelitő módszereket szoktak alkalmazni.

mat. stat.

Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószinüségi mezőn értelmezett valószinüségi változók, amelyek második momentuma véges. Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $m_i=M(\xi_i)$, $D_i=D(\xi_i)>0$ $(i=1,\dots,n)$, $c_{ij}=C(\xi_i,\xi_j)$, $r_{ij}=R(\xi_i,\xi_j)$ $(i,j=1,\dots,n)$, és $C=(c_{ij})$, $R=(r_{ij})$.

mat. stat.

Bebizonyitjuk a következő tételt.

TÉTEL. Ha $\exists\, D(\xi_i) = D_i > 0$ $i = \overline{1,n}$ és

~~Ha~~ $\xi_1, \dots, \xi_n$ lineárisan függetlenek. ~~és a második momentumok léteznek~~, akkor bármely i $(1 \leq i \leq n)$ indexre létezik egyetlen olyan

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_{i,j} x_j$$

(ez egy sík egyenlete)

lineáris függvény, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely tőle különböző $x_i = y_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j x_j$ lineáris függvényre

$$M\left(\left(\xi_i - \left(y_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j \xi_j\right)\right)^2\right) > M\left(\left(\xi_i - \left(\beta_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_{i,j} \xi_j\right)\right)^2\right);$$

itt

$$\beta_{i,j} = -\frac{C_{i,j}}{C_{i,i}} \quad (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n), \quad \beta_i = m_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{C_{i,j}}{C_{i,i}} m_j,$$

(ahol $C_{i,j}$, $C_{i,i}$ a C kovarianciamátrix (i,j) ill. (i,i) elemeihez tartozó előjeles adjungált aldeterminánsai !!!!

Tekintsük az

$$f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = M\left(\left((\xi_i - m_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j (\xi_j - m_j)\right)^2\right) =$$

$$= D_i^2 - 2\sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_{i,j} y_j + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j,k\neq i}}^{n} c_{j,k} y_j y_k$$

függvényt. Ez mindenütt nem-negatív, folytonos, és totális minimumát végesben fekvő pontokban veszi fel; az ilyen pontokban egyúttal helyi szélső értékek is lesznek. Továbbá f mindenütt kétszer folytonosan parciálisan differenciálható

ld. először 9. lap

Bizonyítás.

A TÉTEL bizonyítását valójában célszerű a következő átalakítással kezdeni [a $\xi_1,\dots,\xi_n$ lin. fgtlenségében $\xi_1-m_1,\dots,\xi_n-m_n$ szerepel, s ezért a minimalizálandó kifejezésben az $m_1,\dots,m_n$ várható értékekkel bővítünk]:

$$(1)\quad M\left\langle\left[\xi_i-\left(y_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j\xi_j\right)\right]^2\right\rangle = M\left\langle\left[(\xi_i-m_i)-(y_i-m_i)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j(\xi_j-m_j)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j m_j\right]^2\right\rangle =$$

$$= M\left\langle\left[\underbrace{\left[(\xi_i-m_i)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j(\xi_j-m_j)\right]}_{A} - \underbrace{\left[y_i-\left(m_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j m_j\right)\right]}_{B}\right]^2\right\rangle = M\left[(A-B)^2\right] = M\left[A^2-2BA+B^2\right] =$$

$$= M(A^2)-2B\underbrace{M(A)}_{=0}+B^2 = M(A^2)+B^2$$

Itt $M(A^2)$ csak az $(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n)=\underline{y}'$ vektortól függ ($\underline{y_i}$-től nem függ), ezért $M(A^2)$-et az $\underline{y}'$ alkalmas (egyértelmű) megválasztásával minimalizáljuk; majd az így nyert $\underline{y}'$ komponenseit beírjuk $\underline{B}$-be és B^2-et abszolút-minimalizáljuk azáltal, hogy őt, s így $|B|$-t is 0-val tesszük egyenlővé ⟨ez y_i megválasztásával (egyértelműen) megtehető⟩, legyen u.is

$$(2)\quad y_i=\beta_i := m_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j m_j \underset{\substack{\text{ld.}\\ \text{7. lap}}}{=} m_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{C_{i,j}}{C_{i,i}}m_j .$$

Az $M(A^2)$ minimalizálását ld. ezekután a 9., 10. lapokon!!!, ahol a rész-minimalizáló $\underline{y}'$ vektorra $\underset{\beta_{i,j}}{y_j} = -C_{i,j}/C_{i,i}$ $j=\overline{1,n}$ $j\neq i$ ... adódik majd!!

 ~~[illegible]~~

$$A^2 := \left[(\xi_i - m_i) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j(\xi_j - m_j)\right]^2 = (\xi_i - m_i)^2 - 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)\, y_j +$$

$$+ \left\langle \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j(\xi_j - m_j) \right\rangle \left\langle \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} y_k(\xi_k - m_k) \right\rangle \qquad \| \, M$$

$$M(A^2) = D_i^2 - 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} c_{ij}\, y_j + \sum_{\substack{j,k=1\\ j,k\neq i}}^{n} c_{jk}\, y_j y_k =: f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \equiv$$

$$\equiv f(\underline{y}') \qquad \underline{y}' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

és legyen δ ($\delta > 0$ eleve !!) a $\sum\limits_{\substack{j,k=1\\ j,k\neq i}}^{n} c_{jk} y_j y_k$ kvadratikus alak minimuma az $\mathbb{R}^{n-1}$ zárt egységgömbfelszínén, azaz, ha $\|\underline{y}'\| = 1$

$\left(\delta := \min\limits_{\|\underline{y}'\|=1} \sum\limits_{\substack{j,k=1\\ j,k\neq i}}^{n} c_{jk} y_j y_k \right)$, és legyen $|c_{ij}| \leq K$ $j = \overline{1,n}$, $j \neq i$

Ekkor $\forall$ $\underline{y}' \neq \underline{0}$ ~~esetén~~ (legyen pl. $\|\underline{y}'\| = r \gg 1$)

$$(\cdot) \quad \sum_{\substack{j,k=1\\ j,k\neq i}}^{n} c_{jk}\, y_j y_k = \|\underline{y}'\|^2 \sum_{\substack{j,k=1\\ j,k\neq i}}^{n} c_{jk} \frac{y_j}{\|\underline{y}'\|} \cdot \frac{y_k}{\|\underline{y}'\|} \geq r^2 \cdot \delta \; (>0)$$

~~[illegible]~~ (itt $\underline{y}'/\|\underline{y}'\|$ az egységgömbfelszínen van !!!) ,

és ugyanakkor

$$(\cdot\cdot) \quad \left| -2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} c_{ij}\, y_j \right| \leq 2 \cdot K \cdot r \cdot (n-1) .$$

Így $(\cdot)$ és $(\cdot\cdot)$-ből

$$(\cdot\cdot\cdot) \quad f(\underline{y}') \geq \underset{\substack{\vee\\ 0}}{D_i^2} + r^2 \cdot \delta - 2K \cdot r(n-1) = D_i^2 + \underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{r} \underbrace{\langle r\delta - 2K\cdot(n-1)\rangle}_{\substack{\downarrow\\ \infty}} \to \quad \text{ha } r \to \infty$$

$\to \infty$ ha $r \to \infty$. Így $(\cdot\cdot\cdot)$ miatt az

$f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ leképezésnek (függvénynek) az <u>infimuma</u>

minimumként realizálódik egy elég nagy sugarú gömb belső pontjában (vagy pontjaiban) <mint kiderül pontosan egy pontjában>. Véve egy ilyen nagy R_0 sugarú ~~gömböt~~ gömböt és kihasználva, hogy $f \in C^\infty(\|\underline{y}'\| \leq R_0)$ adódik hogy ~~minimum~~ y' – minimumpontban (~~pontosabban lokális szélsőértékpontban~~ ; globális maximumhelye nincs f-nek – mivel $(\ast\ast\ast)$ miatt $\sup_{\underline{y}' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(\underline{y}') = +\infty$!!!! □)

$$\cancel{0 = f_{y_j}(\underline{y}') = -2c_{ij} + \sum_{k=1,\ k\neq i} c_{jk} y_k \qquad j=\overline{1,n},\ j\neq i}$$

$$\boxed{0} = f_{y_\ell}(\underline{y}') = -2c_{i\ell} + \sum_{\substack{j\neq i \\ (k=j)}} \left(c_{jj} y_j^2\right)_{y_\ell} + \left(\sum_{\substack{j,k=1 \\ j,k\neq i;\ k\neq j}}^{n} c_{jk}\, y_j y_k\right)_{y_\ell} = \qquad \ell=\overline{1,n};\ \ell\neq i$$

$$= -2c_{i\ell} + 2c_{\ell\ell} y_\ell + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,\ k\neq \ell \\ \ell\neq i}}^{n} c_{\ell k} y_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i,\ \ell\neq j \\ \ell\neq i}}^{n} c_{j\ell} y_j = \qquad (c_{j\ell} = c_{\ell j} \text{ miatt})$$

$$= -2c_{i\ell} + 2\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} c_{\ell k} y_k ,$$

azaz

$$(\ast\ast) \quad \sum_{\substack{k=1 \\ \ell,k\neq i}}^{n} c_{\ell k} y_k = c_{i\ell} = c_{\ell i} \qquad \ell=\overline{1,n},\ \ell\neq i,\ k\neq i$$

A $(\ast\ast)$ egyenletrendszer determinánsa $\square_{i,i} > 0$, (pozitív definit) mátrix $\square_{i,i}$ előjeles ($(-1)^{i+i}=1>0$) aldeterminánsa ami így pozitív (spec. nemnulla) – ezért $(\ast\ast)$-nak pontosan egy $\underline{y}' = (y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n)$ megoldása van. E pont ($\underline{y}'$) eleve globális minimumhely (nemcsak lokális) – ami logikailag is világos; de másképpen is adódik abból, hogy az $n-1$ változós $\sum_{j,k=1,\ j\neq i}^{n} c_{jk} y_j y_k$ fv. HESSE mátrixa: $\square_{i,i} > 0$ (azaz pozitív definit (!!)). □

Az algebrából jól ismert módon a (*.*) egyenletrendszer-ből pl. y_j értékére a következő adódik: ~~y~~ y_j = egy tört, amelynek a nevezője a ~~$|\square_{i,i}|$~~ $n-1$-edrendű ~~deter-~~ ~~mináns értéke $|\square_{i,i}| = (\ldots)$~~ $\square_{i,i}$ ~~a törtben~~ adjungált, előjeles determináns-érték < NODE az előjele $(-1)^{i+i} = (-1)^{2i} = 1$, s ezért $\square_{i,i}$ = a (*.*) egyenletrendszer determinánsával >; az $\underline{y_j}$ számlálójában pedig a $\square_{i,i}$ mátrix ($(n-1)\times(n-1)$-es típusú) $\underline{j}$-edik oszlopába be kell írni a jobboldalról (az eredeti oszlop helyébe) a

$$\begin{bmatrix} c_{1,i} \\ c_{2,i} \\ \vdots \\ c_{l,i} \\ \vdots \\ c_{n,i} \end{bmatrix} \quad l \neq i$$

vektort, s az így nyert $\underline{n-1}$-edrendű determináns kerül $\underline{y_j}$ számlálójába $\equiv \delta$

Ez a vektor a $\square$ mátrix $\underline{i}$-edik oszlopvektora (de $c_{i,i}$ nélkül)!!!, ezért ott az iménti determinánsban célszerű a helyére tenni, s ez $j-(i-1)$ oszlopcserével tehető meg (ha pl. $j < i$; a $j > i$ eset hasonlóképpen számítható) az iménti determináns értéke $(-1)^{j-i+1} = -(-1)^{j-i}$-szeresére változik.

A legeslegutóbbi determináns persze nem más, mint a $\square$ mátrix $\underline{i}$-edik sora és $\underline{j}$-edik oszlopa törlésével nyert mátrix determinánsa $\equiv \tilde{\delta} = \underset{\downarrow}{\square_{i,j}} / (-1)^{i+j}$, NODE $\tilde{\delta} = -(-1)^{j-i} \cdot \delta$, ezért

előjeles adjungált aldetermináns

ide behozva $-(-1)^{j-i}\delta = \square_{i,j} / (-1)^{i+j}$, $\delta = -\dfrac{(-1)^{i+j}}{(-1)^{j-i}} \square_{i,j} =$

$= -(-1)^{2i} \square_{i,j} = -\square_{i,j}$ adódik ●

Mégegyszer megismételve: azt nyertük, hogy

$$= D\left(\xi_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j \xi_j\right) + \left(y_i - M\left(\xi_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j \xi_j\right)\right)^2 =$$

$$= M\left(\left(\left(\xi_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j \xi_j\right) - M\left(\xi_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j \xi_j\right)\right)^2\right) + \left(y_i - \left(m_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j m_j\right)\right)^2 =$$

$$f(\underline{y}) = M\left(\left((\xi_i - m_i) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j (\xi_j - m_j)\right)^2\right) + \left(y_i - \left(m_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j m_j\right)\right)^2.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy a $\beta_i = m_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_{i,j} m_j$ választással bármely $y_i, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ értékrendszer esetén

$$M\left(\left(\xi_i - \left(y_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_j \xi_j\right)\right)^2\right) \geq M\left(\left(\xi_i - \left(\beta_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_{i,j} \xi_j\right)\right)^2\right)$$

teljesül, és itt egyenlőség akkor és csakis akkor van, ha $y_i = \beta_i$, és $y_j = \beta_{i,j}$ $(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$.

Ezzel tételünket bebizonyitottuk.

Az

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_{i,j} x_j = m_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{C_{i,j}}{C_{i,i}} (x_j - m_j)$$

hipersikot ξ_i -nek a $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n$ valószinűségi változókra vonatkozó <u>regressziós hipersikjának</u> nevezzük. A

[*] $C_{i,j}$, $R_{i,j}$:= a C ill. R mátrix megfosztva az i.-edik sorától és a j.-edik oszlopától. D_i := a D mátrix megfosztva az i.-edik sorától és oszlopától. Így $C_{i,j} = D_i R_{i,j} D_j$ $C_{i,j} = D_i R_{i,j} D_j \Rightarrow$

$$\frac{|C_{i,j}|}{|C_{i,i}|} \overset{\text{det.}}{=} \frac{D_1^2\cdots D_n^2}{D_iD_j}\,|R_{i,j}| \Big/ \frac{D_1^2\cdots D_n^2}{D_i^2}\,|R_{i,i}| = \frac{D_i}{D_j}\,\frac{|R_{i,j}|}{|R_{i,i}|}$$

$$\hat{\xi}_i = m_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{C_{i,j}}{C_{i,i}}(\xi_j - m_j)$$

valószinüségi változó pedig ξ_i-nek a $\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_n$ valószinüségi változókra vonatkozó <u>lineáris regressziója</u>.

Végül a

$$\beta_{i,j} = -\frac{C_{i,j}}{C_{i,i}} \overset{[*]}{=} -\frac{D_i}{D_j}\frac{R_{i,j}}{R_{i,i}} \quad (j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n)$$

együttható neve: ξ_i ξ_j <u>-re vonatkozó regressziós együtthatója</u>.

Mondhatjuk tehát, hogy $\hat{\xi}_i$ a $\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_n$ valószinüségi változók azon lineáris függvénye, amely az összes lehetséges lineáris függvény körül négyzetes átlagban a legjobban közeliti meg ξ_i-t.

Speciálisan két ξ, η valószinüségi változó esetén a <u>regressziós egyenesek</u>

$$x = M(\xi) + R(\xi,\eta)\frac{D(\xi)}{D(\eta)}(y - M(\eta)), \text{ ill. } y = M(\eta) + R(\xi,\eta)\frac{D(\eta)}{D(\xi)}(x - M(\xi)).$$

Az

$$\eta_i = \xi_i - \hat{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_{i,j}}{C_{i,i}}(\xi_j - m_j)$$

valószinüségi változót ξ_i-nek a $\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_n$ valószinüségi változókra vonatkozó <u>maradékának</u> nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy $M(\eta_i)=0$ $(i=1,\dots,n)$, és a kifejtési tétel szerint

$$M\left((\xi_j-m_j)\eta_i\right)=M\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{i,k}}{C_{i,i}}(\xi_k-m_k)(\xi_j-m_j)\right)=$$

$$=\frac{1}{C_{i,i}}\sum_{k=1}^{n}c_{j,k}C_{i,k}=\begin{cases}0 & (j\neq i),\\ \dfrac{|C|}{C_{i,i}} & (j=i);\end{cases}$$

tehát $R(\eta_i,\xi_j)=0 \quad (j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n)$. Továbbá

$$D^2(\eta_i)=M(\eta_i^2)=M\left(\eta_i\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{i,j}}{C_{i,i}}(\xi_j-m_j)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{i,j}}{C_{i,i}}M(\eta_i(\xi_j-m_j))=\frac{|C|}{C_{i,i}}=D_i^2\frac{|R|}{R_{i,i}} .$$

Bizonyos esetekben a lineáris közelités nem megfelelő, ilyenkor magasabb foku polinomokkal való közelitést alkalmaznak. Igy pl. felvehető az a kérdés, hogyan lehet megadni az η valószinüségi változónak a legjobb $\hat{\eta}=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\xi^i$ alaku közelitését, ahol ξ valószinüségi változó, és $n(\geqq 2)$ természetes szám. Ez a probléma is visszavezethető az előző esetre, ha az $\eta, \xi_1=\xi, \xi_2=\xi^2,\dots,\xi_n=\xi^n$ valószinüségi változókra alkalmazzuk az előző tételt.

mgt. 2 int.

mus 2 int

~~V.4. Parciális korreláció. Többszörös korreláció. Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószinüségi mezőn értelmezett lineárisan független valószinüségi változók. Tegyük fel, hogy a második momentumok léteznek, és használjuk az előző pont jelöléseit.~~

VIII. 5. <u>A matematikai statisztika alaptétele.</u> A matematikai statisztikában elvi jelentőségü az alábbi tétel.

<u>A matematikai statisztika alaptétele. Legyenek</u> $\xi_1, \xi_2, \ldots$ <u>teljesen független, azonos eloszlásu valószinüségi változók; a közös eloszlásfüggvényüket jelöljük</u> $F(x)$ <u>-szel. Legyen</u> $\Phi_n(x) = \Phi_n(\omega, x)$ <u>azon</u> k $(1 \leq k \leq n)$ <u>indexek száma,</u> osztva n-nel <u>amelyekre</u> $\xi_k(\omega) < x$. <u>Ha</u> $\Delta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\Phi_n(x) - F(x)|$, <u>akkor</u>

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0\right) = 1.$$

A matematikai statisztikában a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sorozatot, ahol ξ_i-k teljesen független, azonos eloszlásu valószinüségi változók, statisztikai mintának nevezik; $\Phi_n(x)$ pedig a statisztikai minta empirikus eloszlásfüggvénye. Ez egy „véletlentől függő függvény". E tétel szerint az empirikus eloszlásfüggvény 1 valószinüséggel az egész számegyenesen egyenletesen konvergál az $F(x)$ közös, un. elméleti eloszlásfüggvényhez. $\Phi_n(x)$ a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ minta elemeiből, konkrét esetben a „mérési adatokból" minden x-re meghatározható:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \\ 1 \leq k \leq n,\ \xi_k < x}} 1$$

mat. stat. mat. stat.

~~Legyen M természetes szám. $x_{M,k}$ $(1 \leq k \leq M)$ jelentse azt a legkisebb x értéket, amelyre $F(x) \leq \frac{k}{M} \leq F(x+0)$ teljesül. Megmutatható, hogy ekkor $\Delta_n \leq \max(\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}) + \frac{1}{M}$, ahol~~

IX. Centrális határeloszlástételek

A határeloszlástételek fontos szerepet játszanak a matematikában. Ezek arra vonatkoznak, hogy milyen feltételek mellett állitható az, hogy valószinüségi változók eloszlásfüggvényei egy további valószinüségi eloszlásfüggvényhez konvergálnak. Különösen fontos kérdés az, hogy az eloszlásfüggvények mikor konvergálnak a normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez; az ilyen tételeket centrális határeloszlástételeknek nevezzük.

IX. 1. Moivre-Laplace-tétel. Ebben a pontban egy egyszerübb tételt bizonyitsunk be, amely azonban történeti szempontból is, és az alkalmazások szempontjából is igen jelentős.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független, azonos eloszlásu valószinüségi változók, $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = 0) = 1 - p = q$ $(0 \leq p \leq 1,\ n = 1, 2, \dots)$. Ekkor minden x-re

$$P\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \Phi(x) \quad (n \to \infty).$$

Tekintve, hogy most $M(\xi_1 + \dots + \xi_n) = np$, és $D^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + \dots + D^2(\xi_n) = npq$, ezért eredményünk most ugy fogalmazható, hogy a $\xi_1 + \dots + \xi_n$ összeg

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - M(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{D(\xi_1 + \dots + \xi_n)}$$

standardizáltjának eloszlásfüggvénye a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez konvergál.

~~Most minden i-re $\varphi_{\xi_i}(t) = p + qe^{it}$, igy a függetlenség miatt~~

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t)=(p+qe^{it})^n \quad (n=1,2,\dots)$$

és igy

$$\varphi_{\eta_n}(t)=e^{-it\frac{np}{\sqrt{npq}}}\left(q+pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}}}\right)^n=$$

$$=\left(pe^{\frac{itq}{\sqrt{npq}}}+qe^{-\frac{itp}{\sqrt{npq}}}\right)^n \quad (n=1,2,\dots),$$

Az e^{ix} függvényre Taylor-sorfejtést alkalmazva kapjuk, hogy

$$\varphi_{\eta_n}(t)=\left(p+q+\frac{(it)^2}{2npq}(pq^2+qp^2)+\varepsilon_n\right)^n=$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{2n}(1+\varepsilon_n)\right)^n,$$

ahol minden rögzitett t-re $\varepsilon_n=\varepsilon_n(t)\to 0 \ (n\to\infty)$. Ebből adódik, hogy minden t-re $\varphi_{\eta_n}(t)\to e^{-t^2/2}$. Láttuk, hogy $e^{-t^2/2}$ éppen a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye, igy a Paul Lévy-féle tételek alapján nyerjük az állitás.

Tételünknek több következményét emlitjük meg.

Tételünkből következik, hogy ha $a<b$, akkor

$$P\left(a\leq\frac{\xi_1+\dots+\xi_n-np}{\sqrt{npq}}<b\right)\to\Phi(b)-\Phi(a),$$

azaz

$$P\left(np+a\sqrt{npq} \leqq \xi_1+\dots+\xi_n < np+b\sqrt{npq}\right) \to \Phi(b)-\Phi(a).$$

Mivel

$$\left(np+a\sqrt{npq} \leqq \xi_1+\dots+\xi_n < np+b\sqrt{npq}\right) = \bigcup_{\substack{k \\ np+a\sqrt{npq} \leqq k < np+b\sqrt{npq}}} (\xi_1+\dots+\xi_n = k),$$

igy

$$P\left(np+a\sqrt{npq} \leqq \xi_1+\dots+\xi_n < np+b\sqrt{npq}\right) = \sum_{\substack{k \\ np+a\sqrt{npq} \leqq k < np+b\sqrt{npq}}} P(\xi_1+\dots+\xi_n = k).$$

A ξ_i valószinüségi változók definiciója szerint viszont

$$P(\xi_1+\dots+\xi_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k=0,\dots,n).$$

Igy a fentiek alapján kimondható a következő állitás.

<u>Ha</u> $a < b$, <u>akkor</u>

$$\sum_{\substack{k \\ np+a\sqrt{npq} \leqq k < np+b\sqrt{npq}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2}\,dt \quad (n \to \infty).$$

Legyen $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P_0)$ valószinüségi mező, $A \in \mathcal{A}_0$, $p = P_0(A)$. Legyen továbbá $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ az $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P_0)$ valószinüségi mezőnek önmagával képzett megszámlálhatóan végtelenszeres szorzatmezője. $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ esetén minden n-re legyen $\xi_n(\omega) = 1$, ha $\omega_n \in A$, $\xi_n(\omega) = 0$, ha $\omega_n \notin A$, és $\mu_n(A) = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Ezekre a

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószinüségi változókra teljesülnek tételünk feltevései, és igy állitható, hogy minden x -re

$$P\left(\frac{\kappa_n - M(\kappa_n)}{D(\kappa_n)} < x\right) \to \Phi(x) \qquad (n \to \infty).$$

Ez a reláció viszont a következőképpen interpretálható.

Moivre-Laplace-tétel. Teljesen független ismétlések során az esemény gyakorisága standardizáltjának eloszlásfüggvénye konvergál a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez.

mat. tel. mat. tel.

IX. 2. Lindeberg-tétel. Az előbbi pontban bebizonyitott tételnek messzemenő általánositása az alábbi tétel.

Lindeberg-~~t~~tétel. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független valószinüségi változók, amelyeknek létezik a második momentuma. Legyen $S_n = \sqrt{D^2(\xi_1) + \ldots + D^2(\xi_n)}$, és jelölje $F_k(x)$ a $\xi_k - M(\xi_k)$ valószinüségi változó eloszlásfüggvényét. Ha minden $\varepsilon\,(>0)$ -ra teljesül a

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{S_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon S_n} x^2 \, dF_k(x) \to 0 \qquad \neq \; \frac{1}{n\sigma} \int_{|x| > \varepsilon\sqrt{n}\,\sigma} x^2 \, d=$$

feltétel, akkor minden x -re

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - M(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{\sqrt{D^2(\xi_1) + \ldots + D^2(\xi_n)}} < x\right) = \Phi(x).$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen függetlenek, azonos eloszlásuak, és a közös második momentum létezik, akkor a Lindeberg-tétel feltevései teljesülnek.

Az (1) feltétel jelentésének megvilágitására megjegyezzük, hogy a nyilvánvaló

II. STATISZTIKAI BECSLÉSEK

Ebben a fejezetben számos uj fogalmat vezetünk be, amelyeket egyszerüség kedvéért csak speciális esetre definiálunk.

II. 1. Torzitatlan és aszimptotikusan torzitatlan becslések.

Legyen $\mathcal{C}=\{\mathcal{P}\}$ R_1 -beli valószinüségi eloszlások valamely nem üres osztálya. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}$ -n értelmezve van egy $t=t(\mathcal{P})$ véges értékü függvény: $\underline{t}$ - t a $\mathcal{C}$ -beli eloszlások paraméterének nevezzük. A $T(x_1,\dots,x_n)$ Borel-mérhető függvényt $\mathcal{C}$ -re vonatkozó (n változós) statisztikának nevezzük, ha van olyan $E(\subseteq R_n)$ halmaz, hogy minden $\mathcal{P}(\in\mathcal{C})$ -re $\mathcal{P}^n(E)=0$, ahol $\mathcal{P}^n$ jelöli a $\mathcal{P}$ eloszlás által R_n -ben meghatározott szorzatmértéket, és $(x_1,\dots,x_n)\notin E$ esetén $T(x_1,\dots,x_n)$ véges, továbbá a $T(x_1,\dots,x_n)$ függvény független $\mathcal{C}$ elemeitől. Megjegyezzük, hogy egy statisztikai függvény bármely $\mathcal{C}$ eloszlásosztályra vonatkozóan statisztika. Viszont például az az $f(x_1,\dots,x_n)$ függvény, amely ugy van értelmezve, hogy ha $\xi_1,\dots,\xi_n$ $N(m,D^2)$ -eloszlásu sokaságból vett minta, és $\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n$, akkor legyen $f(x_1,\dots,x_n)=S_n^2/D^2$, az összes R_1 -beli normális eloszlások osztályára vonatkozóan nem statisztika.

Legyen n természetes szám. Azt mondjuk, hogy a $T(x_1,\dots,x_n)$

függvény <u>a</u> $\mathcal{C}$ <u>osztály</u> t <u>paraméterének</u> (n <u>változós</u>) <u>torzitatlan becslése</u>, ha $T(x_1,\dots,x_n)$ $\mathcal{C}$ -re vonatkozóan statisztika, és

$$\int_{R_n} T(x_1,\dots,x_n)\,dP^n = t(P) \qquad (P\in\mathcal{C}).$$

(Néha a „$\mathcal{C}$ <u>osztály</u> t <u>paraméterének becslése</u>" kifejezés helyett a „$\mathcal{C}$ osztály esetén a t paraméter becslése" elnevezést használjuk. Ha félreértésre nincs ok, akkor az „n változós" jelzőt is elhagyjuk. Gyakran a $T(\xi_1,\dots,\xi_n)$ valószinüségi változót is becslésnek nevezzük.) Ez a követelmény annyit jelent, hogy bármely $P\,(\in\mathcal{C})$ -eloszlásu sokaságból vett $\xi_1,\dots,\xi_n$ minta esetén

$$M(T(\xi_1,\dots,\xi_n)) = t(P).$$

Legyen minden n -re megadva egy $T_n(x_1,\dots,x_n)$ függvény. Azt mondjuk, hogy a $\{T_n(x_1,\dots,x_n)\}$ sorozat <u>a</u> $\mathcal{C}$ <u>osztály</u> t <u>paraméterének aszimptotikusan torzitatlan becslése</u>, ha minden n -re $T_n(x_1,\dots,x_n)$ $\mathcal{C}$ -re vonatkozóan statisztika, és

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_n} T_n(x_1,\dots,x_n)\,dP^n = t(P) \qquad (P\in\mathcal{C}).$$

Ez a követelmény viszont annyit jelent, hogy bármely olyan $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat esetén, amelynek tagjai teljesen független, azonos $P\,(\in\mathcal{C})$ -eloszlásu valószinüségi változók,

$$\lim_{n\to\infty} M(T_n(\xi_1,\dots,\xi_n)) = t(P).$$

Megemlitjük, hogy ezek a fogalmak könnyen általánosithatók arra az esetre, amikor a paraméter valamely ℓ -dimenziós $\vec{t} = (t_1,\dots,t_\ell)$ vektor $(t_i = t_i(P);\ i=1,\dots,\ell)$. Ekkor <u>a</u> $\mathcal{C}$ <u>osztály</u> $\vec{t}$ <u>paraméterének torzitatlan becslésén</u> olyan

$\vec{T}(x_1,\dots,x_n)=(T_1(x_1,\dots,x_n),\dots,T_\ell(x_1,\dots,x_n))$ függvényt értünk, amelynél minden i-re $T_i(x_1,\dots,x_n)$ a $\mathcal{C}$ osztály t_i-paraméterének torzitatlan becselése. Továbbá <u>a $\mathcal{C}$ osztály $\vec{t}$ paraméterének aszimptotikusan torzitatlan becslésén</u> olyan $\{\vec{T}^{(n)}(x_1,\dots,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ $(\vec{T}^{(n)}(x_1,\dots,x_n)=(T_1^{(n)}(x_1,\dots,x_n),\dots,T_\ell^{(n)}(x_1,\dots,x_n));$ $n=1,2,\dots)$ sorozatot értünk, amelynél minden i-re a $\{T_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat a $\mathcal{C}$ osztály t_i paraméterének aszimptotikusan torzitatlan becslése. Kézenfekvő az olyan jellegü általánositás is, amelynél $\mathcal{C}$ valamely R_k-beli valószinüségi eloszlások osztálya. Ebben az esetben a szóbanforgó statisztikák változói és a statisztikai minták elemei is k-dimenziós vektorok lesznek.

<u>Tétel</u>. <u>Az összes véges várható értékü eloszlások osztálya esetén a számtani közép a várható értéknek torzitatlan becslése</u>.

Az állitás nyilvánvaló. Hiszen ha $\xi_1,\dots,\xi_n$ statisztikai minta, és $M(\xi_i)=m$ $(i=1,\dots,n)$, akkor

$$M(\bar{\xi}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)=m.$$

<u>Tétel</u>. <u>Az összes véges szórásu eloszlások osztálya esetén a korrigált átlagos négyzetes eltérés a szórásnégyzetnek torzitatlan becslése</u>.

Legyen $\xi_1,\dots,\xi_n$ $(n>1)$ statisztikai minta, és tegyük fel, hogy $D^2(\xi_i)=D^2$ véges. Bevezetve a $\xi_i'=\xi_i-M(\xi_i)$ $(i=1,\dots,n)$ valószinüségi változókat, kapjuk, hogy

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i'^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i'\right)^2.$$

Egyszerü számolással adódik, hogy

$$M(\sigma^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i'^2)-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i'^2)-\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}M(\xi_i'\xi_j')=D^2-\frac{1}{n}D^2=\frac{n-1}{n}D^2,$$

amiből

$$M(\sigma^{*2})=M\left(\frac{n}{n-1}\sigma^2\right)=D^2.$$

Az előbbiek alapján nyilvánvaló, hogy az összes véges szórásu eloszlások osztálya esetén az átlagos négyzetes eltérések $\{S_n^2\}$ sorozata a szórásnégyzetnek aszimptotikusan torzitatlan becslése.

II. 2. Konzisztens és erősen konzisztens becslések. Az előző paragrafusok jelölései mellett azt mondjuk, hogy a $\{T_n(x_1,\dots,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat a $\mathcal{C}$ osztály t paraméterének konzisztens becslése, ha minden n-re $T_n(x_1,\dots,x_n)$ $\mathcal{C}$-re vonatkozóan statisztika, és bármely olyan $\{\xi_n\}$ sorozat esetén, amelynek elemei teljesen független, azonos $\mathcal{P}(\in\mathcal{C})$-eloszlásu valószinüségi változók,

$$T_n(\xi_1,\dots,\xi_n)\xrightarrow{P} t(\mathcal{P}) \qquad (n\to\infty)$$

teljesül.

Továbbá azt mondjuk, hogy a $\{T_n(x_1,\dots,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat a $\mathcal{C}$ osztály t paraméterének erősen konzisztens becslése, ha minden n-re $T_n(x_1,\dots,x_n)$ a $\mathcal{C}$ osztály t paraméterének torzitatlan becslése, és $D(T_n(\xi_1,\dots,\xi_n))\to 0$ $n\to\infty$ $(\forall\,\mathcal{P}\in\mathcal{C})$, azaz

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_n}(T_n(x_1,\dots,x_n)-t(\mathcal{P}))^2\,d\mathcal{P}^n=0 \quad (\mathcal{P}\in\mathcal{C}).$$

Az erős konzisztencia annyit jelent, hogy bármely olyan $\{\xi_n\}$

sorozat esetén, amelynek tagjai teljesen független, azonos $\mathcal{P}(\in \mathcal{C})$ -eloszlásu valószinüségi változók,

$$M(T_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = t(\mathcal{P}) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

és

$$\lim_{n \to \infty} D(T_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = 0$$

teljesülnek.

Ha $\{T_n(x_1, \dots, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\mathcal{C}$ osztály t paraméterének erősen konzisztens becslése, akkor bármely olyan $\{\xi_n\}$ sorozat esetén, amelynek tagjai teljesen független, azonos $\mathcal{P}(\in \mathcal{C})$ eloszlásu valószinüségi változók, tetszőleges $\varepsilon\,(>0)$ mellett

$$\mathcal{P}(|T_n(\xi_1, \dots, \xi_n) - t(\mathcal{P})| > \varepsilon) < \frac{D^2(T_n(\xi_1, \dots, \xi_n))}{\varepsilon^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

teljesül, amiből nyilvánvaló, hogy ha egy becsléssorozat a $\mathcal{C}$ osztály t paraméterének erősen konzisztens becslése, akkor a $\mathcal{C}$ osztály t paraméterének konzisztens becslése is.

<u>Tétel</u>. <u>Az összes véges szórásu valószinüségi eloszlások osztálya esetén az $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ számtani közepek sorozata a várható értéknek erősen konzisztens becslése</u>.

Ha ugyanis a $\xi_1, \dots, \xi_n$ minta elemeinek közös D szórása létezik, akkor

$$D^2(\bar{\xi}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i) = \frac{D^2}{n}.$$

Ebből pedig az állitás nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független, azonos eloszlásu valószinüségi változók, amelyek közös m várható értéke létezik, akkor a Kolmogorov-féle nagy számok törvénye szerint

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}=m\right)=1.$$

Igy a számtani közepek sorozata már az összes véges várható értékü eloszlások osztálya esetén is a várható értéknek konzisztens becslése.

Tétel. A korrigált átlagos négyzetes eltérések $\{s_n^{*2}\}$ sorozata az összes véges negyedik momentummal rendelkező valószinüségi eloszlások osztálya esetén a szórásnégyzetnek erősen konzisztens becslése.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független, azonos eloszlásu valószinüségi változók, amelyek közös m_4 negyedik momentuma véges; közös szórásukat jelöljük D -vel. Az előzőek szerint csak azt kell megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} D(\sigma_n^{*2})=0,$$

ahol tehát

$$\sigma_n^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi}_n)^2 \quad \left(\bar{\xi}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i;\ n>1\right).$$

Az előzőek szerint

(1) $$D^2(\sigma_n^{*2})=M(\sigma_n^{*4})-M^2(\sigma_n^{*2})=M(\sigma_n^{*4})-D^4.$$

Tekintsük σ_n^{*2} alábbi előállitását:

$$\sigma_n^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i'^2-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i'\right)^2,$$

ahol $\xi_i'=\xi_i-M(\xi_i)$ $(i=1,\dots,n)$. Ebből kapjuk, hogy

$$(n-1)^2\sigma_n^{*4} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i'^4 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \xi_i'^2\xi_j'^2 -$$

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i'^4 - \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i'^2\xi_j'^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i'^3\xi_j' -$$

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j,\, i\neq k,\, j\neq k}}^{n}\xi_i'\xi_j'\xi_k' - \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ i\neq j,\, i\neq k,\, i\neq l,\\ j\neq k,\, j\neq l,\, k\neq l}}^{n}\xi_i'\xi_j'\xi_l'\xi_l'.$$

A várható értéket képezve, a ξ_i'-k függetlensége alapján könnyen nyerjük, hogy

$$M(\sigma_n^{*4}) = \frac{n}{(n-1)^2}m_4 + \frac{n(n-1)}{(n-1)^2}D^4 - \frac{n}{n^2(n-1)}m_4 - \frac{n(n-1)}{n^2(n-1)^2}D^4.$$

Ebből és (1)-ből pedig

$$D^2(\sigma_n^{*2}) = \frac{1}{n-1}D^4 + \frac{n}{(n-1)^2}m_4 - \frac{1}{n(n-1)^2}m_4 - \frac{1}{n(n-1)}D^2 \to 0\ (n\to\infty)$$

adódik.

Könnyen belátható az alábbi segédtétel.

<u>Ha a</u> $\{T_n(x_1,\dots,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ <u>sorozat a</u> $\mathcal{C}$ <u>osztály</u> t <u>paraméterének aszimptotikusan torzitatlan becslése, és</u> $D(T_n(\xi_1,\dots,\xi_n)) \to 0$ $\quad n\to\infty$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty}\int_{R_n}(T_n(x_1,\dots,x_n)-t(P))^2\,dP^n = 0\ (P\in\mathcal{C})},\quad (\forall P\in\mathcal{C}),$$

<u>akkor a</u> $\{T_n(x_1,\dots,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ <u>sorozat a</u> $\mathcal{C}$ <u>osztály</u> t <u>paraméterének konzisztens becslése</u>.

Legyenek ugyanis $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független, azonos $\mathcal{P}(\in \mathcal{C})$ -eloszlásu valószinüségi változók, és legyen $\varepsilon\,(>0)$ tetszőleges. A jelölés egyszerüsitése érdekében vezessük be a $\hat{T}_n = T_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ $(n=1,2,\dots)$ jelölést. Ekkor a feltevések szerint van olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $|M(\hat{T}_n) - t(\mathcal{P})| < \varepsilon/2$. Igy $n > n_0$ esetén $(|\hat{T}_n - t(\mathcal{P})| > \varepsilon) \subseteqq (|\hat{T}_n - M(\hat{T}_n)| > \varepsilon/2)$, amiből a Csebisev-egyenlőség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$P(|\hat{T}_n - t(\mathcal{P})| > \varepsilon) \leqq P(|\hat{T}_n - M(\hat{T}_n)| > \varepsilon/2) \leqq 4\,\frac{D^2(\hat{T}_n)}{\varepsilon^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Ennek a segédtételnek az alapján nyilvánvaló, hogy az átlagos négyzetes eltérések $\{s_n^2\}$ sorozata az összes véges negyedik momentummal rendelkező valószinüségi eloszlások osztálya esetén a szórásnégyzetnek konzisztens becslése.

Megemlitjük, hogy a konzisztens becslés és az erősen konzisztens becslés fogalma természetes módon általánositható arra az esetre is, amikor a paraméter a $\vec{t}(\mathcal{P}) = (t_1(\mathcal{P}), \dots, t_\ell(\mathcal{P}))$ vektor. Ekkor a $\mathcal{C}$ osztály $\vec{t}$ paraméterének konzisztens, ill. erősen konzisztens becslésén olyan $\{\vec{T}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ $(\vec{T}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (T_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \dots, T_\ell^{(n)}(x_1, \dots, x_n));\ n=1,2,\dots)$ sorozatot értünk, ahol minden i -re $(1 \leqq i \leqq \ell)$ $\{T_i^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}$ a $\mathcal{C}$ osztály t_i paraméterének konzisztens, ill. erősen konzisztens becslése.

~~II. 3. Hatásos becslések. Ebben a paragrafusban is az előző paragrafusok jelöléseit használjuk. Legyen n természetes szám, és tekintsük a~~